Finito o infinito? Serie numeriche tra teoria e paradossi

Alberto G. Setti
Università dell'Insubria - Como, Italy
alberto.setti@uninsubria.it

Liceo Scientitico Galileo Ferraris, Varese, 15 ottobre 2012

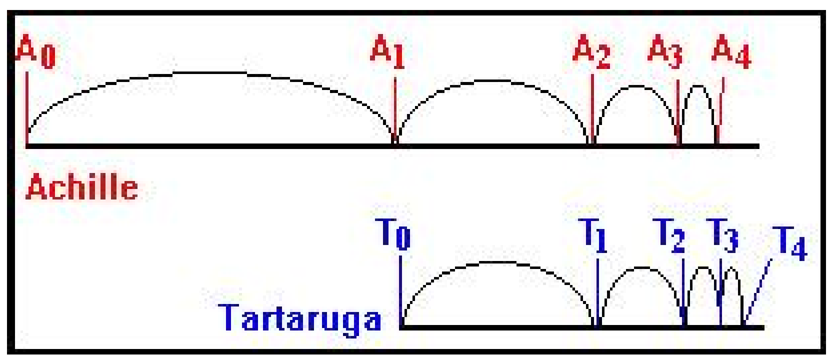
Somme infinite e il paradosso di Achille e la tartaruga.

Zenone aveva concepito questo paradosso per dimostrare l'impossibilita' del moto:

Supponiamo che Achille pie' veloce (A) sfidi ad una gara di corsa la lenta tartaruga (T). La gara si svolgera' su un percorso di 100 metri. Achille corre alla velocita' di 10 metri al secondo mentre la tartaruga solo a 1 metro al secondo, e per riequilibrare le cose Achille concede un vantaggio di 10 metri alla tartaruga.

Facciamo vedere che Achille non raggiungera' mai la tartaruga.

Infatti nel primo secondo A avra' percorso 10 metri, e si trovera' nel punto di partenza di T. Ma in quel secondo T avra' percorso 1 metro e sara' quindi 1 metro davanti a A. In 1/10 di secondo A avra' percorso il metro che lo separa da T, ma T nel frattempo avra' percorso 1/10 di metro. Nel successivo 1/100 di secondo A percorre il 1/10 di metro, ma nel frattempo T e' avanzata di 1/100 di secondo, e cosi' via all'infinito, e T sara' sempre davanti ad A.



Dov'e' l'inghippo?

In realta', se scriviamo

spazio percorso = velocita' X tempo

ci rendiamo conto che A raggiunge T al tempo t soluzione dell'equazione

$$10t = 10 + t$$

cioe' esattamente dopo 10/9 secondi.

Ma questo non sembra risolvere la questione. Il problema dal punto di vista dei Greci e' che non ammettevano che la somma di infinite quantita' potesse dare una quantita' finita, o, equivalentemente che una quantita' finita fosse infinitamente divisibile.

Ma le cose stanno veramente cosi'?

E' chiaro che non possiamo neppure concepire di eseguire la somma di infiniti addendi. Il processo di somma non avrebbe mai fine. Per risolvere la questione si usa il concetto di somma parziale e quello di limite.

Consideriamo una successione di numeri

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n, \ldots$$

allora diremo che la successione tende a un valore A se per n abbastanza grande a_n e' vicino ad A tanto quanto si vuole.

Per esempio, la successione

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots$$

tende a zero perche' se n e' grande $1/n$ e' tanto vicino a 0 quanto si vuole.

E diremo che la successione tende a infinito se per n abbastanza grande a_n e' piu' grande di qualunque numero fissato.

Per esempio, la successione

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots 2^n, \ldots$$

tende a infinito.

Formalizziamo questi concetti, che sono simili al concetto di limite di funzione per x che tende a $+\infty$ con le definizioni:

Si dice che a_n tende a l per n che tende a infinito, e scriviamo

$$l = \lim_{n \to +\infty} a_n \quad \text{o} \quad a_n \to l \text{ per } n \to +\infty$$

se comunque preso un numero $\epsilon > 0$ si trova un N tale che

$$\text{per ogni } n \geq N \qquad l - \epsilon < a_n < l + \epsilon.$$

Si dice che a_n tende a infinito (- infinito) per n che tende a infinito, e scriviamo

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty(-\infty) \quad \text{o} \quad a_n \to +\infty(-\infty) \text{ per } n \to +\infty$$

se comunque si sceglie M arbitrariamente grande si trova un N tale che

$$\text{per ogni } n \geq N \qquad a_n > M \, (a_n < -M).$$

Per esempio: $\lim_n (1 - 1/n) = 1$ e $\lim_n \sqrt{n} = +\infty$.

E cosa possiamo dire delle relazioni tra limiti e operazioni algebriche? se $a_n \to 3$ e $b_n \to 5$ allora $a_n \pm b_n \to 3 \pm 5$, $a_n \cdot b_n \to 3 \cdot 5$ ..., cioe' il limite di una somma e' la somma dei limiti, il limite di un prodotto e' il prodotto dei limiti e il limite di un quoziente e' il quoziente dei limiti, PURCHE' NON SI PRESENTINO FORME DI INDECISIONE.

Esempi:

$$\lim_n \frac{n+1}{4n+3} = \lim_n \frac{n(1-1/n)}{n(4+3n)} = \lim_n \frac{1-1/n}{4+3/n} = 1/4,$$

$$\lim_n \frac{n^2+n+1}{n^3+2n} = \lim_n \frac{n^2(1+1/n+1/n^2)}{n^3(1+2/n^2)} = \lim_n \frac{1+1/n+1/n^2}{n(1+2/n^2)} = 0,$$

$$\lim_n \frac{n^3+n}{n^2+1} = \lim_n \frac{n^3(1+1/n^2)}{n^2(1+1/n^3)} = +\infty.$$

E in questi altri casi?

$$\lim_n \frac{\sin(1/n)}{1/n} = ?, \qquad \lim_n \frac{n}{2^n} = ? \qquad \lim_n (1 + 1/n)^n = ?$$

Mediante il concetto di limite possiamo dare un senso alla somma degli infiniti termini di una successione

$$a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4,\, \dots\, a_n,\, \dots$$

usando il concetto di limite nel modo seguente:

Condideriamo le somme parziali

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
&\dots \\
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\
&\dots
\end{aligned}$$

Possiamo pensare che per n sempre piu' grande la somma parziale approssimi sempre meglio la somma degli infiniti termini della successione, e che la somma degli infiniti termini sia proprio il limite (se esiste) delle somme parziali quando n tende a infinito.

Scriviamo

$$S = a_1 + a_2 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \lim_n Sn$$

In linguaggio tecnico, la somma infinita S viene indicata con il simbolo

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

e viene detta somma della serie associata alla successione a_n.

Puo' accadere facilmente che la somma finita sia infinita,
p.es. $1 + 1 + 1 + 1 + \cdots = +\infty$ perche' per ongi n, $S_n = n$ oppure che non esista
p.es. $1 - 1 + 1 - 1 \ldots$, poiche' in questo caso le somme parziali sono alternativamente 1 e 0, e il loro limite non esiste.

Rimane la questione se una somma infinita possa essere finita. Come abbiamo visto per i Greci la risposta era no.

Consideriamo il caso di Achille e la tartaruga: gli intervalli di tempo che consideriamo sono 1 secondo, 1/10 di secondo, 1/100 di secondo e cosi' via. La somma di tutti questi intervalli di tempo sara' finita o infinita?

Quindi stiamo considerando la somma infinita

$$S = 1 + 1/10 + 1/100 + 1/1000 + \cdots + 1/10n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n}.$$

In generale consideriamo la somma infinita della progressione geometrica di ragione x:

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

dove x e' un numero. Per calcolare S consideriamo le somme parziali

$$Sn = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

Se $x = 1$ allora

$$S_n = n + 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_n S_n = +\infty$$

Se invece $x \neq 1$ si ha

$$Sn = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

e quindi

$$xS_n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^{n+1} = S_n + x^{n+1} - 1$$

da cui

$$S_n(x-1) = x^{n+1} - 1 \quad \text{e quindi} \quad S_n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Cosa succede se n e' molto grande?

Dipende dal valore di x.

Se $x > 1$ allora x^{n+1} diventa sempre piu' grande al crescere di n:

P.es.

$$2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ \ldots,\ 2^{10} = 1024,\ \ldots$$

cioe'

$$\text{se } x > 1, \quad \lim_n x^{n+1} = +\infty$$

e, anche in questo caso,

$$S_n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \to +\infty \text{ per } n \to +\infty.$$

Se invece $0 < x < 1$, allora x^{n+1} diventa sempre piu' piccolo al crescere di n:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},\ \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8},\ \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16},\ \ldots \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024},\ \ldots$$

cioe'

$$\text{se}\ \ 0 < x < 1\ \ \text{allora}\ \ \lim_n x^{n+1} = 0$$

e in questo caso

$$S_n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \to \frac{1}{1 - x}$$

E per $x < 0$?

Nel caso particolare di Achille e la tartaruga x=1/10 e applicando la formula si trova

$$S = \frac{1}{1 - 1/10} = \frac{10}{9}$$

proprio come avevamo previsto usando un po' di fisica.

Anche l'espansione decimale di un numero e' una somma infinita:

infatti il numero

$$x = 0,12567495\ldots$$

e' per definizione la somma infinita

$$x = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{6}{10^4} + \frac{7}{10^5} + \frac{4}{10^6} + \frac{9}{10^7} + \frac{5}{10^8} + \cdots$$

e le operazioni sui numeri rappresentati da allineamenti decimali infiniti non periodici (cioe' sui numeri ?) vengono fatte approssimando il numero con un suo troncamento (cioe' la somma infinita con una somma parziale) e poi prendendo n sempre piu' grande (cioe' passando al limite).

Usando le serie (= somme infinite) si puo' per esempio giustificare il fatto che

$$0,99999999999\cdots = 1$$

Infatti

$$\begin{aligned}
0,99999\ldots &= 9/10 + 9/100 + 9/1000 + \ldots \\
&= 9(1/10 + 1/100 + 1/1000 + \ldots) \\
&= 9(1 + 1/10 + 1/100 + 1/1000 + \cdots - 1) \\
&= 9(10/9 - 1) = 1
\end{aligned}$$

Operazioni sulle serie.

Calcolare la somme delle seguenti serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{4}{9} \times \frac{1}{1-2/3} = \frac{4}{3}$$

$$n \sum_{n=1\infty} \frac{24^n + 3^n}{5^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \cdots = 2\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{1-4/5}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{1-3/}$$

Supponiamo che una pallina che cade sul pavimento rimbalzi all'80% dell'altezza dalla quale viene fatta cadere. Quale e' la distanza complessiva che percorrera' se viene fatta cadere da un'altezza di un metro?

Nella prima caduta percorre 1 metro, poi rimbalza fino a $0,8 = 4/5$ metri, e, tra ascesa e discesa, percorre $2 \times 4/5$ metri, poi rimbalza a $\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$ metri, ecc. Quindi lo spazio percorso complessivamente e'

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = 1 + 2 \times \frac{4}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = 1 + \frac{8}{5} \times \frac{1}{1 - 4/5} = 9$$

metri.

L'insieme di Cantor

Partiamo da un intervallo di lunghezza 1, che chiamiamo C_0. Al primo passaggio dividiamo C_0 in 3 intervalli di lunghezza $1/3$, e togliamo l'intervallo centrale. Otteniamo C_1. Poi dividiamo ciascuno dei 2 intervalli che compongono C_1 in tre intervalli di lunghezza $1/9$ e togliamo quelli centrali, ottenendo C_2. E continuiamo cosi' dividendo ad ogni passo ciascuno degli intervalli ottenuti al passo precedente e togliendo quello di mezzo.

Osserviamo che l'insieme C_n ottenuto al passo n-esimo e' composto da 2^n intervalli ciascuno di lunghezza $(1/3)^n$, e quindi la lunghezza complessiva $\ell(C_n)$ di C_n e' $(2/3)^n$.

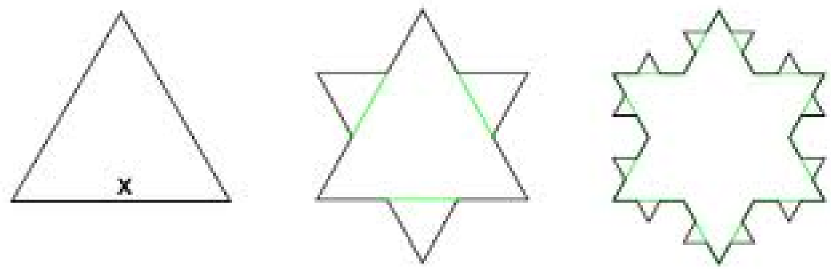
L'insieme di Cantor C e' l'insieme che si ottiene inersecando tutti i C_n. Quale sara' la sua lunghezza complessiva?

Poiche' $C \subset C_n$ per ogni n, $\ell(C) \leq \ell(C_n)$, e poiche' $(2/3)^n \to 0$ per $n \to +\infty$, concludiamo che $\ell(C) = 0$.

Detto in altri termini, la somma delle lunghezze degli intervalli che sono stati a ogni passo e' uguale alla lunghezza dell'intervallo di partenza. Si potrebbe quindi pensare che l'insieme di Cantor consista di un numero molto piccolo di punti. E invece l'insieme di Cantor ha infatti tanti punti quanti l'intervallo di partenza, nel senso che c'e' una corrispondenza biunivoca tra C e $[0, 1]$.

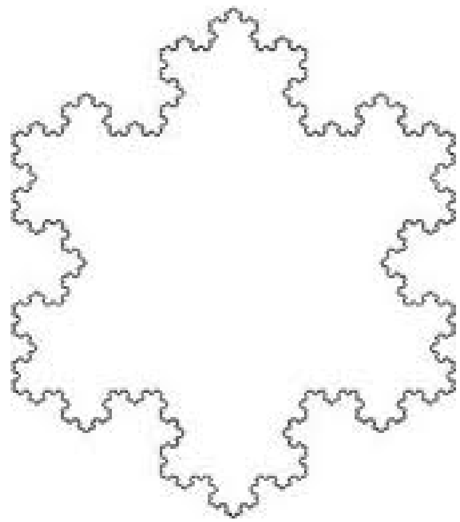
Probelma: Se nella costruzione dell'insieme di Cantor, ad ogni passaggio tolgo l'intervallo centrale di lunqhezza pari a $1/9$ dell'intervallo di partenza, quale sara' la lunghezza complessiva dell'insieme che si ottiene?

Il fiocco di neve di Koch.



Partiamo da un triangolo equilatero K_0 di lato 1. Al primo passo, aggiungiamo a ciascuno dei lati lati un triangolo equilatero di lato $1/3$ ottendo K_1. E continuiamo in questo modo aggiungendo ad ogni passo a ciascun lato della figura ottenuta un triangolo equilatero di lato $1/3$ quella del lato originale.

Il fiocco di neve di Koch K e' la figura limite che si ottiene come unione delle figure ottenute ad ogni passo.



Vogliamo calcolare l'area di K, e sommeremo le aree dei triangoli che via via aggiungiamo. Notiamo che ad ogni passo aggiungiamo un triangolo per ogni lato della figura al passo precedente, e che quindi ogni lato della figura da' luogo a 4 lati al passo successivo.

Chiamiano $A(=\sqrt{3}/4)$ l'area del triangolo di partenza.

Passo 1. Aggiungiamo 3 triangoli di area $\frac{A}{9}$, e quindi $A_1 = A(1+3/9)$.

Passo 2. Ad ogni lato della figura del passo 1 aggiungiamo un triangolo di area $\frac{1}{9^2}A$. Ogni lato del triangolo K_0 da' luogo a 4 lati, abbiamo aggiunto $3 \cdot 4$ triangoli e quindi

$$A_2 = A_1 + 3 \times 4 \times \frac{A}{9^2} = A(1 + \frac{3 \times 4^0}{9^1} + \frac{3 \times 4^1}{9^2})$$

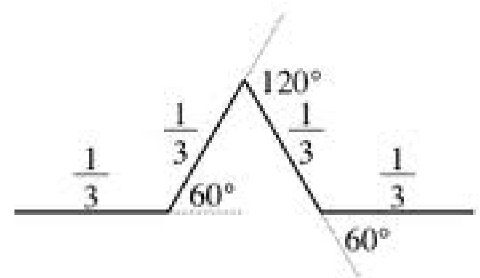
Passo n. Poiche' al passo precedente ci sono $3 \times 4^{n-1}$ lati,

$$A_n = A(1 + \frac{3 \times 4^0}{9^1} + \frac{3 \times 4^1}{9^2} + \frac{3 \times 4^2}{9^3} + \cdots + \frac{3 \times 4^{n-1}}{9^n})$$

Quindi l'area del fiocco di neve e'

$$
\begin{aligned}
A_\infty &= A(1 + \frac{3 \times 4^0}{9^1} + \frac{3 \times 4^1}{9^2} + \frac{3 \times 4^2}{9^3} + \cdots + \frac{3 \times 4^n}{9^{n+1}} + \ldots) \\
&= A(1 + \frac{3}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{9^n}) = A(1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 - 4/9}) = \frac{8}{5} A.
\end{aligned}
$$

Per quello che riguarda il perimetro, abbiamo gia' notato che passando da un livello a quello successivo ciascun lato da' origine a 4 lati di lunghezza pari ad un terzo della lunghezza del lato di partenza.



Quindi K_n ha 3×4^n lati di lunghezza $(1/3)^n$ e il suo perimetro

$$\ell(K_n) = 3\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

e poiche' $4/3 > 1$,

$$\ell(K_\infty) = \lim_n \ell(K_n) = \lim_n 3\left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty.$$

Serie telescopiche.

Sono serie della forma $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$. In questo caso e' facile calcolare le somme parziali. Infatti:

$$S_n = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}.$$

Quindi

$$\lim_n S_n = \lim_{n=1} (a_1 - a_{n+1}) = a_1 - \lim_n a_{n+1}$$

purche' esista $\lim_n a_{n+1}$.

Esempio:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \text{ Serie di Mengoli}$$

Notiamo che $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)}$. e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \lim_{n} \frac{1}{n+1} = 1.$$

Esercizi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} =?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} =?$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} -\log(1 - \frac{1}{n^2}) =?.$$

E' facile convincersi che se tutti i termini di una somma infinita sono piu' grandi di una quantita' positiva prefissata, la somma infinita e' uguale a $+\infty$.

Infatti, se $a_n \geq a > 0$ per ogni n, allora

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n \geq n \cdot a$$

e quindi la somma infinita

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n + \cdots = \lim_n S_n = +\infty.$$

Infatti si puo' vedere che se una serie converge, cioe' $S_n \to S$ con S finito, allora necessariamente $a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$. Quindi una condizione necessaria perche' una serie sia finita e' che $a_n \to 0$.

E' vero in generale che se a_n tende a zero, cioe' se sommiamo termini sempre piu' piccoli, la somma infinita e' necessariamente finita?

Proviamo a considerare il caso della cosiddetta serie armonica

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + \cdots + 1/n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

in cui $a_n = 1/n$. Possiamo provare a calcolare

$$S_n = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + \cdots + 1/n$$

per alcuni valori di n, e vedere se riusciamo a farci un idea del possibile risultato: approssimando fino a 3 cifre decimali si trova

$$S_{10000} = 9.788 \quad S_{11000} = 9.882 \quad S_{12000} = 9.969$$
$$S_{13000} = 10.050 \quad S_{14000} = 10.124 \quad S_{15000} = 10.193$$
$$S_{16000} = 10.258 \quad S_{17000} = 10.318 \quad S_{18000} = 10.375$$
$$S_{19000} = 10.429 \quad S_{20000} = 10.481$$

Cosa possiamo concludere da questa simulazione? Effettivamente, la differenza tra i valori delle somme parziali successive diventa sempre piu' piccola. Ma per n che tende a infinito la successione tendera' a un valore finito o no?

Si puo' notare che passando da 10000 termini a 20000 termini il la differenza di valore e' in effetti un po' piu' di 0.5.

Infatti e' la somma infinita non e' finita e questo si puo vedere cosi:

Consideriamo la somma

$$1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) +$$
$$(1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 14 + 1/15 + 1/16) + \dots$$

notiamo che

$$(1/3 + 1/4) > (1/4 + 1/4) = 1/2$$
$$(1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) > (1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8) = 1/2$$
$$(1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 14 + 1/15 + 1/16) > 1/2$$

quindi

$$S_{16} > 1 + 4 \cdot 1/2 \quad (16 = 2^4)$$

e allo stesso modo

$$S_{32} > 1 + 5 \cdot 1/2 \quad (32 = 2^5).$$

In modo del tutto analogo si verifica che

$$S_{2^k} > 1 + k \cdot 1/2$$

cosicche'

$$\lim S_{2^k} = +\infty \qquad \text{e} \qquad S = \lim S_n = +\infty$$

E invece cosa possiamo dire di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

o, piu' in generale, di

$$\sum_{n} \frac{1}{n^p} \quad p > 0 \quad (p\text{-serie})?$$

Risulta che la p-serie e' finita se e solo se $p > 1$. Ma per per questo rimandiamo ai corsi di analisi del primo anno di universita'.

Per oggi concludiamo con un ultimo fatto un po' sorprendente. In generale la somma di una serie dipende dall'ordine con cui si addizionano gli addendi.

Consideriamo la serie

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\dots$$

Si puo' dimostrare che tale serie converge e la sua somma e' $\log_e 2$. Moltiplichiamo la serie per $1/2$ e scriviamo

$$\frac{1}{2} \qquad -\frac{1}{4} \qquad +\frac{1}{6} \qquad -\frac{1}{8} \qquad +\frac{1}{10}+\cdots=\frac{1}{2}\log_e 2$$

cosicche' sommando le due serie termine a termine si trova

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots=\frac{3}{2}\log_e 2$$

ma quest'ultima serie si ottiene dalla prima riordinando i suoi termini.

Ci si puo' chiedere se ci siano condizioni sotto le quale vale la proprieta' commutativa per le serie. La risposta e' affermativa. La proprieta' commutativa vale per la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se e solo se la somma infinita $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ e' finita. Osserviamo che nell'esempio considerato sopra, la serie dei moduli e' la serie armonica, che, come si e' visto, non e' finita.